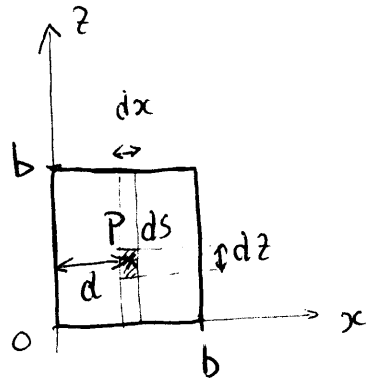
Examen de Mécanique du Solide 13/11/2008

Ex 1. Fermeture d'une porte de voiture

a)



par définition le moment d'inertie est

$$I_{(Oz)} = \iint_{P \in \text{porte}} dm(P)\, d^2$$

d est la distance entre P et l'axe (Oz)

avec les coordonnées définies sur la figure $d = x$

$dm(P) = \sigma\, dS(P)$ avec σ : masse surfacique

la porte est homogène donc $\sigma = c^{te} = \dfrac{m}{b^2}$ $\quad b^2$ surface de la porte

$$I_{(Oz)} = \frac{m}{b^2} \iint dS\, x^2 = \frac{m}{b^2} \int_0^b x^2 dx \int_0^b dy = \frac{1}{3} \frac{m}{b^2} b^3 b = \frac{1}{3} m b^2$$

b) Le référentiel (R') de la voiture est uniformément accélérée par rapport à (R) référentiel du sol qui est Galiléen.

↳ $\vec{\Omega}_{(R')/(R)} = \vec{0} = c^{te}$

(R') ne tourne pas par rapport à (R) donc $\vec{\Omega}_{(R')/(R)} = \vec{0}$

Il n'y a donc pas de force de Coriolis.

L'accélération d'entraînement de (R') par rapport à (R) est $\vec{a_e} = \vec{0} = c^{te}$

Dans (R'), la force d'entraînement s'écrit par définition $\vec{f_e} = -\iint dm(P)\, \vec{a_e}(P)$

$$\vec{f_e} = -\vec{0} \iint_{P \in \text{porte}} dm(P) = -m\vec{0}$$

Pour déterminer le point d'application de cette force calculons le moment de $\vec{f_e}$ par rapport à un point A fixe dans (R')

$$\vec{M}_A(\vec{f_e}) = -\iint \vec{AP} \wedge dm(P)\, \vec{a_e}(P) = -\left(\underbrace{\iint_{P \in \text{part}} \vec{AP}\, dm}_{\text{↳ } = m\vec{AG}} \right) \wedge \vec{0}$$

par définition de G barycentre de la porte

donc $\vec{M}_A(\vec{f_e}) = \vec{AG} \wedge \vec{f_e}$ $\Rightarrow$ G est le point d'application de $\vec{f_e}$

Rmq : cette question a été traité en cours. On pouvait donc dire que G est le point d'application, puis le redémontrer.

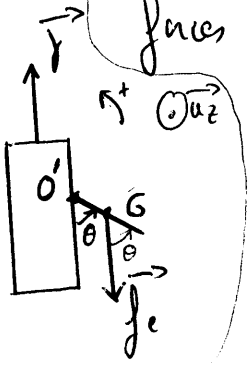
c) La porte se ferme lorsque $\Theta = 0$.

Donc pour déterminer la vitesse angulaire de la porte lorsqu'elle se ferme il suffit de connaitre $\dot{\Theta} = \frac{d\Theta}{dt}$ en fonction de Θ.

La question b) suggère de travailler dans (R') non Galiléen.

Dans (R'), on peut utiliser l'énergie (th de l'énergie cinétique) ou bien le th. du moment cinétique.

Avec le th de l'énergie cinétique : (1ère méthode)



Forces qui s'exercent sur la porte dans (R') :

- poids de la porte : $m\vec{g}$ vertical ; mais $m\vec{g}$ ne travaille pas car le déplacement de G est horizontal. ($\perp$ à $\vec{g}$)
- force de contact entre la porte et l'axe (Oz) de la voiture : ne travaille pas car pas de frottement.
- force d'entrainement $\vec{f_e}$ appliquée en G.

Travail de $\vec{f_e}$: $W_{fe} = \int_{\text{initial}}^{\text{final}} \vec{f_e} \cdot d\vec{O'G}$ en polaire : $\vec{O'G} = r\vec{u_r} = \frac{b}{2}\vec{u_r}$ (b/2 = r)

$d\vec{O'G} = \frac{b}{2} d\vec{u_r} = \frac{b}{2} d\theta \, \vec{u_\theta}$

$$W_{fe} = \int_{\text{initial} \to \Theta = \frac{\pi}{2}}^{\text{final} \to \Theta = 0} -\frac{b}{2} d\theta \sin\Theta \, m\gamma = m\gamma\frac{b}{2}\left[+\cos\Theta\right]_{\pi/2}^{0} = m\gamma\frac{b}{2} > 0$$

$\vec{f_e}$ dans le sens du déplacement

Dans (R') $(O'z)$ est un axe fixe et la porte tourne autour de $(O'z)$ l'énergie cinétique de la porte est donc dans (R') :

$$E_c = \frac{1}{2} I_{(O'z)} \dot{\Theta}^2$$

le th de l'énergie cinétique dans (R') s'écrit $\Delta E_c = W_{fe}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J \dot{\Theta}_f^2 - \frac{1}{2} J \dot{\Theta}_i^2 = m\frac{\gamma b}{2}$$

avec $\dot{\Theta}_f$ la vitesse angulaire par $\Theta = 0$; (par $\Theta = \frac{\pi}{2}$: $\dot{\Theta}_i = 0$ ← condition initiale)

donc $\frac{1}{2}\frac{1}{3} m b^2 \dot{\Theta}_f^2 = m\frac{\gamma b}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\Theta}_f = -\sqrt{3\frac{\gamma}{b}}}$ ← ! signe

Autre méthode avec th du moment cinétique par rapport à $(O'z)$

Moment cinétique par rapport à un axe orienté fixe $(O'z)$ dans (R') :

$$L_{(O'z)} = J_{(O'z)}\,\dot\theta$$

Moment des forces sur la porte par rapport à $(O'z)$

- poids : $M_{(O'z)}(m\vec g) = (\underbrace{\vec{O'G} \wedge m\vec g}_{\vec M_{O'}(m\vec g) \perp \text{axe}(Oz)}) \cdot \vec u_z = 0$

- force de contact entre la voiture et la porte : point d'application sur l'axe $(O'z)$ $\Rightarrow$ $M_{(O'z)}(\text{force contact}) = 0$

- force d'entraînement $M_{(O'z)}(\vec f_e) = (\vec{O'G} \wedge \vec f_e) \cdot \vec u$

($\vec{O'G}$: pt d'application de $\vec f_e$)

$$= -\frac{b}{2}\,|f_e|\sin\theta = -\frac{b}{2}\,m\gamma\sin\theta$$

Th du moment cinétique par rapport à un axe orienté dans (R') :

$$\frac{dL_{(O'z)}}{dt} = \sum M_{(Oz)}(\text{forces ext})$$

donc $J_{(O'z)}\,\ddot\theta = -\frac{b}{2}\,m\gamma\sin\theta$

$$\frac{1}{3}\,m b^2\,\ddot\theta = -\frac{b}{2}\,m\gamma\sin\theta$$

on $\times$ par $\dot\theta$: $\frac{1}{3}\,b\,\ddot\theta\,\dot\theta = -\frac{1}{2}\,\gamma(\sin\theta)\,\dot\theta$

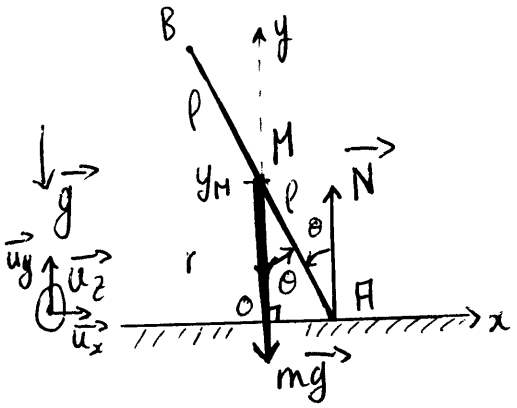
en intégrant $\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,b\,\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\gamma\cos\theta + C^{te}$

initialement $\theta = \frac{\pi}{2}$ et vitesse nulle donc $C^{te} = 0$ $\Rightarrow$ $\dot\theta = -\sqrt{\frac{3\gamma}{b}\cos\theta}$

lorsque la porte se ferme : $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\dot\theta = -\sqrt{\frac{3\gamma}{b}}$

⚠ signe : $\dot\theta = -\sqrt{\dot\theta^2}$ d'après la géométrie du pb.

Ex 2 Chute d'une barre :



a) M est le milieu de AB
la barre est homogène donc M est le centre de gravité de la barre (G)

Forces sur la barre dans (R) lié au sol :
- poids $m\vec{g}$ point d'application $M \equiv G$
- force du sol sur la barre $\vec{N}$ ⊥ au sol car il n'y a pas de frottement
le point d'application de $\vec{N}$ est H

(i) Loi de la résultante dynamique dans le référentiel (R) galiléen.

$$\sum_{ext} \text{forces sur la barre} = m\,\vec{a}(G) = m\,\vec{a}(M)$$

ici $$m\vec{g} + \vec{N} = m\,\vec{a}(M) \quad (1)$$

$m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont // (Oy) $\Rightarrow$ $\vec{a}(M) // (Oy)$ $\quad \vec{a}(y) = a(y)\,\vec{u_y}$

$$\Rightarrow \vec{v}(M) = \int_0^t a(y)\,\vec{u_y}\,dt + \underbrace{\vec{v}(t=0)}_{=0} \quad \text{← condition initiale}$$

$$= \vec{u_y} \int_0^t a(y)\,dt \quad \text{donc } \vec{v}(M) // \vec{u_y}$$

La trajectoire de M est donc // (Oy) $\Rightarrow$ le mouvement de M est vertical

on peut donc écrire $$\vec{OM} = y_M\,\vec{u_y} \quad (2)$$

(ii) le triangle (OHM) est rectangle en O donc $y_M = l\cos\theta$ (3)

Soit (R^*) le référentiel barycentrique ((R^*) est centré en $M \equiv G$ et en translation par rapport à (R)), dans (R^*) on peut utiliser le Th. du moment cinétique ($\hat{m}$ si (R^*) n'est pas galiléen) cf. cours :

$$\left(\frac{d\vec{L_G}}{dt}\right)_{/(R^*)} = \sum \vec{\text{Moments des forces réelles extérieures sur barre}}$$
par rapport à $G \equiv M$

- moment du poids $\vec{\mathcal{M}}_{/M}(m\vec{g}) = \vec{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$
- moment de $\vec{N}$: $\vec{\mathcal{M}}_{/M}(\vec{N}) = \vec{MA} \wedge \vec{N} = \ell N \sin\theta \, \vec{u_z}$ (4)

avec $N = \|\vec{N}\|$ qui peut être déterminer à partir de (1)

en effet d'après (2) $\vec{OM} = y_M \vec{u_y}$ donc $\vec{a}(M) = \ddot{y}_M \vec{u_y}$

donc d'après (1) : $(-mg + N)\vec{u_y} = m\ddot{y}_M \vec{u_y}$

donc $N = m\ddot{y}_M + mg$ (5)

d'après (3) : $\dot{y}_M = \frac{d}{dt} y_M = -\dot{\theta}\,\ell \sin\theta$

et donc $\ddot{y}_M = -\dot{\theta}^2 \ell \cos\theta - \ddot{\theta}\,\ell \sin\theta$ (6)

le moment de $\vec{N}$ en fonction de θ et de ses dérivées temporelles est donc

d'après (4), (5) et (6) $\vec{\mathcal{M}}_{/M}(\vec{N}) = m\ell\left(g - \dot{\theta}^2 \ell \cos\theta - \ddot{\theta}\,\ell \sin\theta\right)\sin\theta \, \vec{u_z}$ (7)

Moment cinétique de la barre $\vec{L}_{/G \equiv M} = \vec{L^*}$
dans (R) → ↖ dans (R^*)

dans (R^*) la barre est en rotation autour de l'axe $(Mz) = (Gz)$

donc $\vec{L^*} = J_{(Gz)}\,\dot{\theta}\,\vec{u_z}$ (8) avec $J_{(Gz)} = \frac{1}{12} m(2\ell)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2$

Ainsi le th du moment cinétique s'écrit : d'après (7) et (8)

$$\frac{1}{3}\cancel{m}\,\ell^{\cancel{2}}\,\ddot{\theta} = \cancel{m}\,\cancel{\ell}\left(g - \dot{\theta}^2 \ell \cos\theta - \ddot{\theta}\,\ell \sin\theta\right)\sin\theta \qquad (9)$$

↑ équation différentielle vérifiée par θ.

b) En utilisant le th. de l'énergie cinétique $\Delta E_c = \sum$ travaux forces

$E_c = \frac{1}{2} m\, v(\underset{\equiv G}{M})^2 + E_c^*$ ← dans Ref (R^*) $E_c^* = \frac{1}{2} J_{(Gz)}\,\dot{\theta}^2$
↑ dans (R)

et $v(M)^2 = \dot{y}_M^2 = \dot{\theta}^2 \ell^2 (\sin\theta)^2$

donc $E_c = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \ell^2 (\sin\theta)^2 m + \frac{1}{6} m\ell^2 \dot{\theta}^2$ (10) dans (R)

- travail de $\vec{N}$: $W(\vec{N}) = \vec{0}$ car $\vec{N} \perp$ au déplacement de H (point d'application de $\vec{N}$)

- travail du poids $m\vec{g}$: $W(m\vec{g}) = -mg\,\Delta y_{(\text{de } G)}$ $\quad G \equiv M$

$= mg(\ell - y_M) > 0$

$W(m\vec{g}) > 0$ car le poids est dans le sens du déplacement

donc le th. de l'énergie cinétique dans (R) galiléen s'écrit

$$E_c(\theta) - E_c(\theta=0) = mg(\ell - y_M) \underset{\uparrow (3)}{=} mg\,\ell(1-\cos\theta)$$

$E_c(\theta=0) = 0$ car initialement $\dot{y}_M = 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$

donc d'après (10) :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \ell (\sin\theta)^2 + \frac{1}{6}\ell\dot{\theta}^2 = g(1-\cos\theta) \qquad (11)$$

En dérivant cette relation par rapport au temps

$$\dot{\theta}\ddot{\theta}\,\ell(\sin\theta)^2 + \dot{\theta}^3 \ell(\cos\theta)\sin\theta + \frac{1}{3}\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} = g\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}\ell\ddot{\theta} = \left(g - \ddot{\theta}\ell\sin\theta - \dot{\theta}^2\ell\cos\theta\right)\sin\theta$$

on retrouve bien l'équation (9)

c) Pour déterminer la vitesse de M lorsque M touche le sol ($\theta = \frac{\pi}{2}$) il faut utiliser l'éq. (11) et non l'équation (9) (car (9) contient $\ddot{\theta}$) :

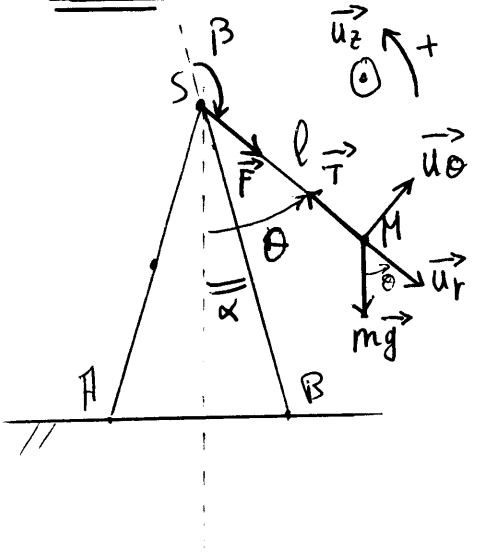
d'après (11) lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\dot{\theta} = \dot{\theta}_f$ ← final

$$\dot{\theta}_f^2\left(\frac{1}{2}\ell + \frac{1}{6}\ell\right) = g \quad \text{soit} \quad \dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}$$

donc $v_{f\,(M)} = -\dot{\theta}_f \ell \sin\frac{\pi}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}\ell g}$ $\quad < 0$ car vers le bas.

↑ final

Ex 3. Stabilité d'une balançoire



a) Force du fil sur la balançoire en S : $\vec{F}$

La tension d'un fil est toujours // au fil

donc $\vec{F}$ // (SM)

⚠ Si SM était une barre rigide $\vec{F}$ ne serait pas // (SM).

Le mouvement de M est circulaire, en coordonnées polaire centrée en S. $\vec{SM} = r\vec{u_r} = l\vec{u_r}$

$\Rightarrow \vec{v}(M) = \dot\theta l \vec{u_\theta}$ et $\vec{a}(M) = \vec{\dot v}(M) = \ddot\theta l \vec{u_\theta} - l\dot\theta^2 \vec{u_r}$

Forces sur la masse m : • $\vec{T}$ tension du fil ; Puisque le Fil est de masse nulle $\vec{F} = -\vec{T}$

• $m\vec{g}$

Principe fondamental de la dynamique (loi de Newton) $\sum \vec{F}_{ext} \text{ sur } m = m\vec{a}(M)$

$\Rightarrow m\ddot\theta l \vec{u_\theta} - ml\dot\theta^2 \vec{u_r} = -\vec{F} + m\vec{g}$ avec $\vec{F} = F\vec{u_r}$

$$\begin{cases} \text{projection sur } \vec{u_r} : & -ml\dot\theta^2 = -F + mg\cos\theta \quad (1) \\ \text{// } \vec{u_\theta} : & -m\ddot\theta l = mg\sin\theta \quad (2) \end{cases}$$

Il faut trouver $\dot\theta$ en fonction de θ pour avoir (d'après (1)) F en fonction de θ.

Pour cela on peut intégrer (2) après avoir multiplié (2) par $\dot\theta$:

$$\int -\ddot\theta\dot\theta l\,dt = g\int \dot\theta \sin\theta\, dt \Rightarrow -\frac{1}{2}\dot\theta^2 l = -g\cos\theta + C$$

C est une constante déterminée par les conditions initiales : à $t=0$: $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\dot\theta = 0$ (vitesse)

donc $C = 0$, ainsi $\dot\theta = \pm\sqrt{\frac{2g\cos\theta}{l}}$ (3)

Rmq le signe de $\dot\theta$ dépend du sens de déplacement de m.

D'après (1) et (3) : $F = mg\cos\theta + m\,2g\cos\theta = 3mg\cos\theta$

soit $\vec{F} = 3mg\cos\theta\,\vec{u_r}$ (4)

b) Moment de $\vec{F}$ par rapport au point B :

$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BS} \wedge \vec{F}$ car S est le point d'application de $\vec{F}$

$= BS\, F \sin\beta\, \vec{u_z}$, avec $\beta = (\vec{BS}, \vec{F})$ voir schéma

Relation angulaire : $\theta - \alpha - \beta = \pi \Rightarrow \beta = \theta - \alpha - \pi < 0$

donc $\sin\beta = -\sin(\pi - (\theta - \alpha)) = -\sin(\theta - \alpha)$

donc $\underline{\vec{M}_B(\vec{F}) = -b\, 3mg \cos\theta \sin(\theta - \alpha)\, \vec{u_z}}$ (5)

⚠ au sens de $\vec{u_z}$ compatible avec les sens + pour les angles.

Rmq : avec la règle de la main on peut vérifier facilement que $\vec{M}_B(\vec{F})$ est opposé à $\vec{u_z}$ lorsque $\theta > \alpha$; et $\vec{M}_B(\vec{F})$ est dans le sens de $\vec{u_z}$ lorsque $\theta < \alpha$.

$\underline{\vec{F} \text{ extrémum pour } \theta = \theta_m \iff \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta}(\theta_m) = \vec{0}}$

$\iff \sin\theta_m(\sin\theta_m - \alpha) - \cos\theta_m \cos(\theta_m - \alpha) = 0$

$\iff \cos(2\theta_m - \alpha) = 0 \iff 2\theta_m - \alpha = \pm\frac{\pi}{2} + n\pi$

avec n entier

$\iff \theta_m = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}$

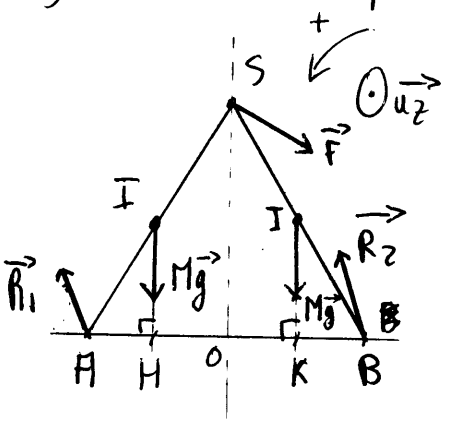
En fait $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\alpha > 0$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$

donc $\underline{\theta_m = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{4}}$ (6)

Rmq Le minimum de $\vec{M}_B(\vec{F})$ ($\vec{M}$ opposé à $\vec{u_z}$) est atteint pour

$\theta_{min} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ (car lorsque $\theta < \alpha$, $\vec{M}$ est dans le sens de $\vec{u_z}$)

c) Moments des poids de AS et BS par rapport au point B



Les points d'application des poids sont, respectivement I et J milieux de [AS] et [BS].
↑ barycentres de ↑ et ↗

$\vec{M_1} = \vec{M}_{/B}(\text{poids de AS}) = \vec{BI} \wedge M\vec{g} = BH\ Mg\ \vec{u_z}$

$\vec{M_2} = \vec{M}_{/B}(\text{poids de BS}) = \vec{BJ} \wedge M\vec{g} = BK\ Mg\ \vec{u_z}$

Relations géométriques $OB = b\sin\alpha$ donc $BK = \frac{1}{2} b\sin\alpha$ et $BH = \frac{3}{2} b\sin\alpha$

ainsi $\vec{M_1} = \frac{3}{2} b(\sin\alpha)\, Mg\, \vec{u_z}$ et $\vec{M_2} = \frac{1}{2} b(\sin\alpha)\, Mg\, \vec{u_z}$ (7)

ces deux moments sont dans le sens de $\vec{u_z}$.

d) Condition de soulèvement du point A

Considérons comme système l'ensemble des 2 montants AS et BS

ce système se soulève en A, si il tourne autour de B.

Soit ω la vitesse angulaire de rotation de ce système autour de l'axe (Bz)

au repos (balançoire stable) $\omega = 0$ donc $\dot{\omega} = 0$

le système se soulève en A si $\dot{\omega} < 0$ à un instant t.

or $L_{(Bz)}$(système des 2 montants) $= J\,\omega$
↑ moment cinétique / axe (Bz) ; ↑ moment d'inertie du système par rapport à (Bz)

Le TH du moment cinétique par rapport à (Bz) dans le référentiel du sol galiléen s'écrit : $\frac{dL_{(Bz)}}{dt} = J\dot{\omega} = \sum$ moment des forces sur les montants extérieurs $G/(Bz)$ (8)

Les forces sur les montants sont les 2 poids $M\vec{g}$, et la force $\vec{F}$ et les réactions du sol $\vec{R}$, et $\vec{R_2}$ (voir schéma)

Rmq : $\vec{R_1}$ et $\vec{R_2}$ ne sont pas verticales à cause de la force $\vec{F}$ (il y a forcement des frottements en B et A).

A l'instant où la balançoire se soulève en A : $\vec{R_1} = \vec{0}$ (plus de contact entre la balançoire et le sol)

de plus $\vec{M}_B(\vec{R_2}) = \vec{BB} \wedge \vec{R_2} = \vec{0}$

le TT du moment cinétique (8) s'écrit donc : d'après (7)

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = 2b(\sin\alpha)Mg + \vec{M}_{(B_z)}(\vec{F}) \\ \text{à l'instant où la balançoire se soulève} \end{cases}$$

$\vec{M}_{(B_z)}(\vec{F})$ → donné par (5) $= \vec{M}_B(\vec{F}) \cdot \vec{u_z}$

Pour que la balançoire se soulève à un instant t il faut $\dot{\omega} < 0$

il faut donc $\begin{cases} 3mg\cos\Theta\sin(\Theta - \alpha) > 2b(\sin\alpha)Mg \\ \text{à cet instant} \end{cases}$ (9)

$\| \vec{M}_B(\vec{F}) \|$

cela doit être vérifié au moins par la valeur minimum de $\vec{M}_B(\vec{F})$ c'est-à-dire par $\Theta = \Theta_{min} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ question b)

la condition (9) s'écrit donc :

$$3m\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 2(\sin\alpha)M$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}m\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\alpha\right) > 2(\sin\alpha)M \quad (\sin\frac{\pi}{2} = 1)$$

$$\Leftrightarrow -(\sin\alpha)(+3m + 4M) > -3m \Leftrightarrow \sin\alpha < \frac{3m}{3m+4M} \quad (10)$$

La balançoire se soulève si (10) est vérifiée, donc pour que la balançoire reste stable il faut $\sin\alpha \geq \frac{3m}{3m+4M}$

c'est à dire $\boxed{\alpha \geq \alpha_m = \text{Arc}\sin\frac{3m}{3m+4M}}$